

# 二維淺水波模式應用於漫地流水理模擬

莊佳融<sup>(1)</sup> 張高華<sup>(2)</sup> 王咏潔<sup>(3)\*</sup>

## 摘要

為瞭解在降雨過程中坡面漫地流之產生與發展，本研究使用淺水波方程式和 Green-Ampt 入滲公式，建立二維淺水波模式，進行漫地流水理模擬。本研究之數值模式以有限體積法進行網格離散，於乾溼不連續交界面採用黎曼求解法以符合通量守恆原則，配合液面重建法維持正水深及靜水穩定之特性，以符合真實物理現象。為測試模式有效性，本研究採用三組前人研究之降雨漫地流實驗為測試案例，進行模式參數率定與驗證，並評估本研究發展之二維淺水波模式應用於漫地流水理模擬的準確性，以 Nash-Sutcliffe 效率係數(NSE)為主要評估依據。案例測試結果中，在三個案例的模式率定及驗證階段，其模擬效率係數 NSE 皆達 0.5 以上，驗證本研究數值模式在均勻坡面漫地流水理模擬的準確性，本研究提出之二維淺水波模式可作為後續坡地土壤侵蝕數值模擬的重要基礎。

(**關鍵詞**：淺水波方程式、漫地流、有限體積法、黎曼求解法、液面重建法)

## Applying a 2D shallow water model in overland flow simulation

*Chia-Jung Chuang*<sup>(1)</sup> *Kao-Hua Chang*<sup>(2)</sup> *Yung-Chieh Wang*<sup>(3)\*</sup>

Master's Student<sup>(1)</sup>, Assistant Professor<sup>(2)</sup>, Associate Professor<sup>(3)</sup>, Department of Soil and Water Conservation, National Chung Hing University, Taiwan

## ABSTRACT

This study considers the shallow water and Green-Ampt equations to establish a two-dimensional shallow water model based on a finite volume method for simulations of overland flows. In the numerical model, the HLLC Riemann solver is used at the dry and wet discontinuous interface to comply with the principle of flux conservation, and a surface reconstruction method is adopted to maintain the conditions of positive water depth and hydrostatic stability to comply with the physical phenomenon. To verify the efficiency of the numerical model, we used three study cases from the

---

(1)國立中興大學水土保持學系 碩士生

(2)國立中興大學水土保持學系 助理教授

(3)國立中興大學水土保持學系 副教授(通訊作者 e-mail : wangyc@nchu.edu.tw)

previous studies carried out in laboratories and in field plots. The Nash-Sutcliffe efficiency coefficient (NSE) was used as the main basis for evaluating the accuracy of the two-dimensional shallow water model developed in this study. In the model calibration and verification stage of the three cases, the simulation efficiency coefficient NSE is more than 0.5, which verifies the accuracy of the proposed numerical model in the simulation of overland flow on a uniform slope. The two-dimensional shallow water model proposed in this study will serve as an important basis for the subsequent numerical simulation of soil erosion studies.

**(Keywords:** shallow water equation, overland flow, finite volume method, Riemann solver, surface reconstruction method)

## 前言

臺灣山區地域因地形特殊，午後雷陣雨經常會在山區頻頻發生，在高強度降雨作用下來不及入滲之雨水便會於地表形成地表漫地流。這些過剩的地表漫地流對淹水預測及坡面土壤侵蝕和土砂運移有著重要的影響，不僅可能造成生命財產損失，也可能使得蓄水區域淤積而減少有效庫容量。因此，為了有效預測評估降雨所造成的地表漫地流，有必要建立一個能反應時間、空間變化之模擬模型。

在漫地流水理分析及數值模擬之研究上，Dunne and Dietrich (1980)表示，雖然一維模型可以有效地預測坡面上的平均流深和流速，但卻無法模擬流場在空間的異變性。Zhang, and Cundy (1989)使用顯示二階有限差分法，建立了二維淺水波模式。該模式能透過改變地表粗糙度、入滲率及微地形模擬真實的空間變化。爾後，越來越多學者利用二維淺水波模型於城市和中尺度集水區的坡面地表漫地流計算(Cea et al., 2010; Costabile et al., 2012; Kivva and Zheleznyak, 2005; Sanders et al., 2008; Schubert et al., 2008)。

在持續降雨下，集水區中地表漫地流主

要於土壤入滲飽和後產生，其水文影響範圍大且時間長，為有效利用計算資源，近年研究多以淺水波方程式(Shallow water equations, SWEs)為漫地流流場分析之主要方程式 (Cea et al., 2010b; Costabile et al., 2012; Howes et al., 2006; Hunter et al., 2007, 2008; Kivva and Zheleznyak, 2005; Sanders et al., 2008; Schubert et al., 2008)，以二維之流速、水深呈現其水理特性。建立數值模型時，需先將模擬範圍之空間進行離散，產生網格化之模擬單元。網格化之空間離散方法，常見者如有限差分法(finite difference method, FDM)、有限體積法(finite volume method, FVM)，和有限元素法(finite element method, FEM)等。以上述離散方法求解淺水坡方程式，則發展出有限差分淺水波模式、有限體積淺水波模式，和有限元素淺水波模式等。

以有限體積法求解二維淺水波方程式(FV 淺水波模式)可滿部分空間的通量守恆，然對於乾、溼床等不連續的交界面，需輔以黎曼求解法(Riemann solver)，維持求解過程中交界面之通量守恆。此外，可靠的淺水波模式須具有維持正水深 (positivity-preserving)和與靜水穩定(well-balanced)之特性。計算過程中

正水深的維持乃防止非正確物理現象發生，避免流體經過高低起伏較大或乾、濕底床交界面時，引入錯誤數值誤差，產生負水深。靜水穩定則描述靜止水體覆蓋於非平坦底床時，仍應維持高度一致之靜水面。當數值模式不滿足靜水穩定的物理特性時，可能因離散高程梯度與誤差引起靜水波動，造成模式不穩定。

前人研究中，已提出許多建立具正水深和靜水穩定特性之 FV 淺水波模式的方法，較具代表性者包括靜壓重建法 (hydrostatic reconstruction method)(Audusse et al., 2004)、修正靜壓重建法 (modified hydrostatic reconstruction method)(Chen and Noelle, 2017)、與液面重建法(surface reconstruction method)(Xia et al., 2017)等。其中，液面重建法可在均勻流經固定斜坡時產生跌水效應，解決其他重建法的缺點，以滿足維持正水深和起伏地形坡面之靜水穩定條件。Xia and Liang (2018)進一步提出液面重建法的隱式方法，處理底床摩擦梯度項，確保模式的穩定度與精確度。

Saint Venant equations 是 1871 年由 Saint Venant 所創造之平均二維非穩態流方程式，時至今日已廣泛應用至淹水模擬上。Green-Ampt Model 由 Green-Ampt (1911) 提出，為描述土壤水分入滲之物理方程式，於前人研究中廣泛使用。故本研究使用 Saint Venant equations 淺水波方程式和 Green-Ampt 入滲公式，以有限體積法配合黎曼求解法和液面重建法，建立二維淺水坡模式 FVSWM\_2D，進行漫地流水理模擬。研究中使用三個分析案例，包括小尺度室內實驗 (案例一)、實驗模

場與解析解資料 (案例二)，以及現地模場資料 (案例三) 進行模式參數率定與驗證，測試 FVSWM\_2D 模式之準確性及應用性，並可作為後續淹水演算和坡地土壤侵蝕模擬等研究之重要基礎。

## 數值模式建立

### 1. 二維淺水波方程式

本研究使用二維淺水波方程式為主要控制方程式，描述坡面漫地流之流場變數水深( $h$ )及流速( $u, v$ )，以向量形式表示如(1)式 (Chaudhry, 2008)：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S(U) \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{其中，} U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}; G =$$

$$\begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} R - i \\ gh(S_{0,x} - S_{f,x}) \\ gh(S_{0,y} - S_{f,y}) \end{bmatrix}; S_0 =$$

底床梯度； $S_f$  = 摩擦梯度； $R$  = 降雨強度 (m/hr)； $i$  = 入滲強度(m/hr)； $g$  = 重力加速度(N/kg)。

以有限體積法進行空間離散，如圖 1 所示，先將(1)式進行積分，表示為：

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dV = \int_V S(U) dV \dots\dots(2)$$

應用高斯散度定理，將(2)式寫成：

$$\frac{d\bar{U}}{dt} + \frac{1}{|V|} \int_{\Omega} \vec{H}(F, G) \cdot \vec{n} d\Omega = \hat{S} \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{其中，} \bar{U} = \frac{1}{|V|} \int_V U dV ; \hat{S} = \frac{1}{|V|} \int_V S dV ;$$

$\bar{\quad}$  表示體積平均； $|V|$  = 體積( $m^3$ )。

以卡式正座標為例，即圖 1， $|V| = \Delta x \cdot \Delta y$  而  $d\Omega = \Delta x$  或  $\Delta y$ ，將(3)式進行空間及時間離散，可得：

$$\hat{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}}) + \hat{S}_{i,j} \dots\dots\dots(4)$$

本研究所發展之有限體積淺水波模式因採用顯式法處理時間離散，故時間間距必須受到顯性有限差分法解雙曲線型偏微分方程，例如： $(\partial u / \partial t) + a(\partial u / \partial x) = 0$  定義參數  $\sigma \equiv a \Delta t / \Delta x$ ，此值必需受限於小於或等於 1，方能使數值穩定，即 CFL 條件控制。

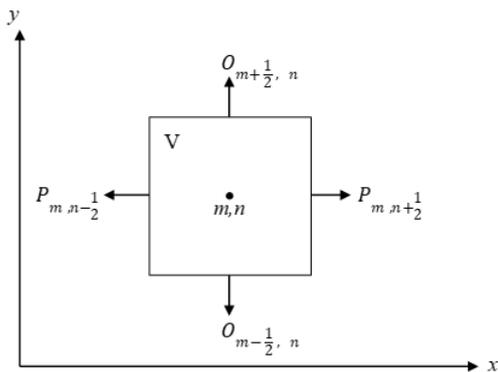


圖1 二維有限體積法之離散控制體積

Figure 1 Discretizing control volume of two-dimensional finite volume method

**2. Green-Ampt 入滲方程式**

Green-Ampt 方程式是最早開發的物理滲透方程式之一(Green-Ampt, 1911)，其入滲模式可以應用於大部分降雨量大於入滲之情況，包括不連續降雨事件。

公式表示式如下：

$$H_1 = Z + D \dots\dots\dots(5)$$

$$H_2 = -\Psi \dots\dots\dots(6)$$

$H_1$  = 土壤地表勢能(m)； $H_2$  = 土壤濕峰勢能(m)； $Z$  = 飽和含水土壤層深度水頭勢能(m)； $D$  = 初始積水水頭勢能(m)； $\Psi$  = 土壤濕峰下的吸水勢能(m)。

飽和含水層勢能差  $H$ ：

$$H = H_1 - H_2 = Z + D + \Psi \dots\dots\dots(7)$$

入滲率以達西公式表式：

$$i = K_s \frac{dH}{dz} = K_s \left[ 1 + \frac{D+\Psi}{Z} \right] \dots\dots\dots(8)$$

$i$  = 入滲率(m/hr)； $K_s$  = 飽和土壤水力傳導係數(m/hr)。

而經過時間  $t$  變化，土壤總累積入滲量  $I(t)$  計算如下：

$$I = (\theta_t - \theta_i)Z \dots\dots\dots(9)$$

$\theta_i$  = 初始土壤含水量； $\theta_t = t$  時間土壤含水量。

式(8)為式(9)對時間之微分值，將式(9)代入式(8)整理可得 Green-Ampt 入滲模式：

$$i = \frac{dF}{dt} = K_s \left[ \frac{F + (\theta_t - \theta_i)(D + \Psi)}{F} \right] \dots\dots\dots(10)$$

**3. HLLC 黎曼求解法**

HLLC 黎曼求解法是一種基於有限體積法求解二維淺水波方程式邊界通量之格式，可以有效處理乾濕河床交界問題，適用於規則網格及不規則網格。圖 2 及(11)式為 HLLC 黎曼法之解結構。

$$\mathbf{f}_* = \begin{cases} \mathbf{f}_L & \text{if } 0 \leq S_L \\ \mathbf{f}_{*L} & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_M \\ \mathbf{f}_{*R} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{f}_R & \text{if } 0 \geq S \end{cases}$$

.....(11)

其中， $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ； $\mathbf{f}_{*,L} = [f_{*,1} \ f_{*,2} \ V_L f_{*,1}]^T$ ； $\mathbf{f}_{*,R} = [f_{*,1} f_{*,2} v_r f_{*,1}]^T$ 。

(11)式中， $\mathbf{f}_*$  通量可由(12)式求得，即：

$$\mathbf{f}_* = \frac{S_R \mathbf{f}_L - S_L \mathbf{f}_R + S_L S_R (\bar{\mathbf{U}}_R - \bar{\mathbf{U}}_L)}{S_R - S_L} \dots\dots\dots(12)$$

上式中，

$$S_L = \begin{cases} u_R - 2\sqrt{gh_R} & \text{if } h_L = 0 \\ \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_* - \sqrt{gh_*}) & \text{if } h_L > 0 \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

$$S_R = \begin{cases} u_L + 2\sqrt{gh_L} & \text{if } h_R = 0 \\ \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u_* + \sqrt{gh_*}) & \text{if } h_R > 0 \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

$$S_M = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \dots\dots\dots(15)$$

其中， $h_L \equiv h_{i,j}$ ； $h_R \equiv h_{i+1,j}$ ； $u_L \equiv u_{i,j} n_x + v_{i,j} n_y$ ； $u_R \equiv u_{i+1,j} n_x + v_{i+1,j} n_y$ ； $u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R}$ ； $h_* = \frac{1}{g} \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(u_L - u_R) \right]^2$ ； $n_x$ 與 $n_y =$ 控制體積表面之法向量。

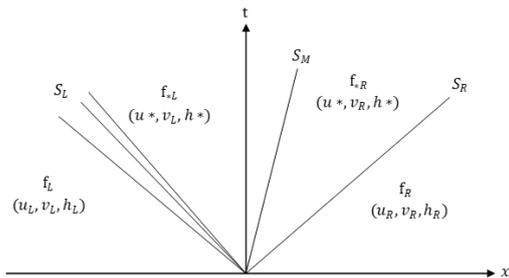


圖2 HLLC 黎曼法之解結構 (改繪自 Liang and Borthwick, 2009)

Figure 2 The solution structure of the HLLC Riemann method (Adapted from Liang and Borthwick, 2009).

4. 液面重建法

為使所建置的 FV 淺水波模式滿足正水深與靜水穩定之特性，本研究採用 Xia et al.(2017)提出之液面重建法，以一維方程式為例，兩相鄰控制體積之液面高程建置方式如下：

$$\begin{cases} z_{s,L} = z_{s,i} + \max \\ \left[ 0, \min(z_{b,i+1} - z_{b,i} - \delta z_b, z_{s,i+1} - z_{s,i}) \right] \\ z_{s,R} = z_{s,i+1} + \max \\ \left[ 0, \min(z_{b,i} - z_{b,i+1} + \delta z_b, z_{s,i} - z_{s,i+1}) \right] \end{cases} \dots\dots\dots(16)$$

其中， $z_s =$ 液面高程(m)； $z_b =$ 底床高程(m)； $\delta z_b = z_{b,i+1/2^+} - z_{b,i+1/2^-}$ 。

上式中：

$$\begin{cases} z_{b,i+\frac{1}{2}^-} = z_{b,i} + \frac{1}{2} \Delta x \psi(r_i) \nabla z_{b,i} \\ z_{b,i+\frac{1}{2}^+} = z_{b,i+1} - \frac{1}{2} \Delta x \psi(r_{i+1}) \nabla z_{b,i+1} \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

其中， $\Delta x =$ 兩控制體積中心之距離(m)； $\psi(r_i) =$ 最小網格坡度梯度限制； $r_i = z_{b,i} - z_{b,i-1}/z_{b,i+1} - z_{b,i}$ ； $r_{i+1} = z_{b,i+2} - z_{b,i+1}/z_{b,i+1} - z_{b,i}$ 。

兩控制體積之底床高程由(18)式結果進行修正：

$$\begin{cases} z_{b,L} = z_{s,L} - h_i \\ z_{b,R} = z_{s,R} - h_{i+1} \end{cases} \dots\dots\dots(18)$$

接著，控制體積表面之底床高程定義為：

$$z_{b,f} = \max(z_{b,L}, z_{b,R}) \dots\dots\dots(19)$$

因此，兩控制體積之修正水深可由(20)式而得：

$$\begin{cases} h_L = \max(0, z_{s,L} - z_{b,f}) \\ h_R = \max(0, z_{s,R} - z_{b,f}) \end{cases} \dots\dots\dots(20)$$

兩控制體積的單寬流量為：

$$\begin{cases} [hu]_L = h_L u_i \\ [hu]_R = h_R u_{i+1} \end{cases} \dots\dots\dots(21)$$

重建後的控制體積水深 $h_L$ 與 $h_R$ ，及單寬流量 $[hu]_L$ 與 $[hu]_R$ ，將應用於 HLLC 黎曼法中的通量計算，即(11)式中。

### 5. 底床梯度項與摩擦梯度項處理

液面高程經重建處理後，底床梯度項可由(22)式計算而得：

$$S_{0,i} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} g(h_i + h_{L,k})(z_{b,i} - \bar{z}_{b,fk}) \mathbf{n}_k \dots\dots\dots(22)$$

其中， $\bar{z}_{b,f} = z_{b,f} - \Delta z_b$ 。

上式中：

當 $\delta z_b \geq 0$ ，

$$\begin{cases} \Delta z_b = \max(0, z_{b,f} - z_{s,i}) \\ \text{for } h_{i+1} < 10^{-10} \\ \Delta z_b = \max[0, \min(\delta z_b, z_{b,f} - z_{s,i})] \\ \text{for } h_{i+1} \geq 10^{-10} \end{cases} \dots\dots\dots(23)$$

當 $\delta z_b < 0$ ，

$$\begin{cases} \Delta z_b = \max(0, z_{b,f} - z_{s,i+1}) \\ \text{for } h_i < 10^{-10} \\ \Delta z_b = \max[0, \min(-\delta z_b, z_{b,f} - z_{s,i+1})] \\ \text{for } h_i \geq 10^{-10} \end{cases} \dots\dots\dots(24)$$

摩擦梯度項之處理方式詳如 Xia and Liang (2018)。

## 模式測試案例

本研究針對三個案例，進行坡面漫地流水力模擬，並與案例中前人研究之流量測量值或解析解計算值確度分析。分析案例包括案例一：小尺度室內進行比較及準實驗(周伯原，2020)、案例二：實驗模場與解析解資料(Nord and Esteves, 2005)，和案例三：現地模場實驗資料(Cea et al., 2016)等，FVSWM\_2D 模式之參數的率定與驗證，測試其準確性及應用性。測試案例中均假設實驗坡面為單一坡度之均勻坡面，且未考量坡面之微地形高程變化，其表面粗糙度皆以曼寧粗糙度係數  $n$  代表。

### 1. FVSWM\_2D 模式率定參數

模式運行時所需輸入的入滲參數為土壤基質吸力  $\Psi$ 、飽和滲透率 $K_s$ 和土壤孔隙率 $\phi$ 。由於試驗區域都為裸露土表，因此，未考慮植被影響(如植物截流與覆蓋度等)，曼寧粗糙係數  $n$  值在假定上為一常數，可以作為一個分布參數輸入。而地面在  $x,y$  方向傾斜( $S_{0x}, S_{0y}$ ) 必須提供。這些參數則由實驗得出或是參考文獻(表1)。

表1 率定後所使用之參數資料

參數 使用案例	曼寧 $n$ ( $s m^{1/3}$ )	飽和滲透率 $K_s$ ( $m s^{-1}$ )	土壤基質 吸力 $\Psi$ (m)	土壤孔隙度 $\phi$ (%)	參考文獻
案例一： 小尺度室內實驗	0.033	$1.1 \times 10^{-5}$	0.01	0.39	周伯原 (2020)
案例二： 實驗模場與解析解資料	0.033	$3.3 \times 10^{-6}$	0.006	0.44	Singer and Walker (1983)
案例三：現 地模場實 驗資料	Case1	$8.0 \times 10^{-8}$	0.01	0.39	Cea et al. (2016)
	Case2	0.033	$8.0 \times 10^{-7}$	0.01	
	Case3	0.033	$8.0 \times 10^{-8}$	0.01	
	Case4	0.4	$9.0 \times 10^{-6}$	0.01	
	Case5	0.4	$2.5 \times 10^{-7}$	0.01	

## 2. 案例一：小尺度室內實驗

周伯原(2020)所使用之實驗裝置為一個可以調整坡度 0%~30%的實驗水槽( $0.75 \times 0.25 \times 0.2m$ )和一個降雨模擬器，該降雨模擬器可使坡面上降下均勻降雨。經過土壤物理實驗可以確定質地三角圖劃分為為砂坩壤土，坩粒含量為 52.64%、砂粒含量為 39.94%、粘粒含量為 7.42%，分析後中值粒徑為  $4.93 \times 10^{-5} m$ ，其他實驗條件的細節在周伯原(2020)中有詳細指示。該實驗主要控制變量為降雨強度，每場事件進行 30 分鐘之均勻降雨，在降雨強度(100 mm/hr)下測試裸露土壤表面之逕流生成情形。而本研究使用其中 5°、15°、25°坡度之實驗數據進行參數率定，

並使用10°、20°、30°坡度之實驗數據進行驗證。

## 3. 案例二：實驗模場與解析解資料

案例二 Nord and Esteves (2005)建立了一個二維實驗室尺度之土壤沖蝕物理模式，該文獻前半部分進行地表漫地流的實驗觀測資料與數值解及解析解進行比較，後半部分則是土壤沖蝕模擬，故本研究借鑒了文章中 Singer and Walker(1983) 實驗觀測值和 Govindaraju and Kavvas (1991)解析解進行數據上之取得。

Singer and Walker (1983)使用之實驗裝置為一個坡度 9%的實驗水槽( $3.0 \times 0.55m$ )和一個降雨模擬器。土壤質地為細砂壤土，粘粒含

量為 13.9%、高級砂土加極細砂含量 59.2%，中值粒徑為  $2 \times 10^{-5}m$ ，其他實驗條件之細節在 Singer and Walker (1983)的列表給出。主要控制變量為降雨強度，在兩種降雨強度 (50、100 mm/hr)下測試裸露土表下逕流之產生。每場降雨事件進行 30 分鐘之降雨。在降雨和逕流產生之條件下，量測水深幾乎是不可能的，但使用垂直插入底床的感測器進行對(50 mm/hr)事件之降雨量估計，流量深度約為  $1 \times 10^{-3} \sim 2 \times 10^{-3}m$ ，這場沒有測量地形高程，但作者表示河床表面並未發生重大之變化。

Govindaraju et al. (1990)開發一種物理地表漫地流之水文模型，該模型由淺水波方程式(shallow water equations)控制地表漫地流，由連續方程式確保質量守恆、動量方程式確保力的平衡，提供了降雨及入滲時間變化的解析解。Govindaraju and Kavvas (1991)利用 Singer and Walker (1983)實驗數據計算出受時空變化降雨影響的近似解析解。本研究使用降雨強度 50 mm/hr 之實驗資料進行參數率定，使用 100 mm/hr 之實驗資料作為模式驗證。

#### 4. 案例三：現地模場實驗資料

Cea et al. (2016)實驗場域位於法國 Cevennes-Vivarais 區域東南部一塊自然斜坡 (60×2.2m，平均坡度為 15%)，觀測期間於 2011 年 11 月至 2013 年 10 月，總共 5 場不同的降雨事件。該地區地處地中海型氣候，葡萄園遍布整個山坡，灰質泥岩下的棕色鈣質土壤，粘土含量為 34%、粉土含量 41%、砂土含量 25%，中值粒徑為  $2.5 \times 10^{-6}m$ 。

該實驗場域斜坡出口處有一條細溝將坡

面水流匯集並輸送至坡口，此設計大大減少了坡面側向逕流的損失。水位高度於出口處每分鐘測量一次，並以此計算流量產生。在本研究中，使用 Cea et al. (2016)觀測的 5 場降雨事件漫地流資料，將每場事件總降雨時間劃分，例如總降雨時間為 8 小時，則取前半段 4 小時作為參數率定使用，而後半段 4 小時作為模式驗證資料依此類推。

### 模式準確度評估標準

在案例分析中，本研究比較 FVSWM\_2D 模式模擬之漫地流流量與案例實驗中之觀測值或解析解計算值，並計算各分析案例在參數率定與模式驗證階段之準確度，以模擬值與實測值或解析解計算值之均方根誤差、Nash-Sutcliffe 效率係數，和平均絕對偏差為評估標準。

#### 1. 均方根誤差

均方根誤差(Root Mean Squared Error, RMSE)之公式於下方介紹之，其主要概念為預測值與實際值差的平方和，平方和愈小表示則模型愈預愈精準。而 RMSE 為一項相對指標，計算公式如下：

$$RMSE = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots(25)$$

其中， $n$  = 樣本總數； $y^{(i)}$  = 預測值； $\hat{y}^{(i)}$  = 實際測量值。

#### 2. Nash-Sutcliffe 效率係數

Nash-Sutcliffe 效率係數(NSE)的主要概念為實測值與模擬值相減平方後加總之值除以實測值與實測平均值相減平方號加總之值，當 NSE 值逾接近 1 時代表模擬值與觀測值愈

相仿，反之，倘諾 NSE 值  $< 0$  則表明平均觀測值相較於模擬值為更好之預測值，代表該模式相對不可靠。而一般認為水文模式之 NSE 值應大於 0.5，則該模型式可被認為是可有效預測之模式 Moriasi et al.(2007)。

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}^{(i)} - \hat{y}^{(i)MEAN})^2} \dots\dots\dots(26)$$

其中， $n$  = 樣本總數； $y^{(i)}$  = 為預測值； $\hat{y}^{(i)}$  = 實際測量值； $\hat{y}^{(i)MEAN}$  = 觀測平均值。

### 3. 平均絕對偏差

平均絕對偏差(Average absolute deviation)是表示各個變量值之間差異程度的數值之一。指各個變量值同平均數的離差絕對值的算術平均數。其公式為：

$$\delta = \frac{\sum |y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}|}{\sum \hat{y}^{(i)}} 100 \dots\dots\dots(27)$$

其中， $y^{(i)}$  = 預測值； $\hat{y}^{(i)}$  = 實際測量值。

## 結果與討論

### 1. 模式參數率定結果

本研究針對四項輸入參數進行模式之率定，分別是曼寧粗糙度係數 $n$ 、飽和滲透率 $K_s$ 、土壤基質吸力 $\Psi$ 及土壤孔隙度 $\theta$ ，案例一、案例二、案例三均在裸露表土進行實驗，因此曼寧粗糙度係數在設定上均使用表面無任何作物之表土作為率定值(Chow and Patterson, 1959)，而在案例三之 Case4 和 Case5 則因為現地因素，曼寧粗糙度係數則是參考 Cea et al. (2016)文獻中率定之參數作使用，飽和滲透率 $K_s$ 在率定上首先參考文獻中在各自模式中率定的參考值，並於本研究中進行率定參考值之調整，土壤基質吸力 $\Psi$ 及土壤孔隙度 $\theta$ 首先

參考文獻中率定之參考值，倘諾文獻中並未進行土壤物理實驗，在土壤基質吸力 $\Psi$ 及土壤孔隙度參考值之選用上則是參考 Rawls et al. (1983)所提供之物理參數進行率定，率定後所使用之參數如表 1 所示。

### 2. 案例一：小尺度室內實驗模擬結果

案例一：小尺度室內實驗模擬結果將 FVSWM\_2D 與周伯原(2020)實驗結果進行比較。土壤表面採用 $0.01 \times 0.01m$ 的均勻網格。參數率定使用坡度5%、15%、25%按照表 1 所示進行模式模擬。本研究由人工填土，土表並未覆蓋任何作物，因此曼寧粗糙係數設定為常數 0.033，降雨強度設定為 100mm/hr然後依照此參數對10%、20%、30%進行驗證組。圖 3 顯示了利用 FVSWM\_2D 得到的流量歷線與周伯原(2020)實驗觀測結果對比。

數值模式之模擬結果中，出流量為穩定地表漫地流之水文歷線；然而在小尺度實驗模場中，觀測結果因受人工降雨機或微地形變化影響，造成沖蝕土槽之坡度越大，水流紊亂，出流量較不穩定，易產生誤差。本研究之 FVSWM\_2D 模式在坡度較大組別，仍合理模擬出流量趨勢，具合理之模擬效率。如表 2 所示，率定組別之 NSE 值為 0.647~0.806 之間，驗證組別之 NSE 值為 0.556~0.728。隨坡度增加，FVSWM\_2D 模式模擬準確率略為下降，但仍預測出流量歷線趨勢；在坡度平緩時(5%)，出流量之模擬值與實測值更為吻合。以誤差而言，RMSE 值介於 5.35~9.46，Delta 值均低於 20%以下。

### 3. 案例二：實驗模場與解析解資料模擬結果

案例二：實驗模場與解析解資料模擬結果將 FVSWM\_2D 與 Singer and Walk (1983) 實驗結果做比較。土壤表面採用  $0.05 \times 0.05\text{m}$  的均勻網格。使用  $50\text{ mm/hr}$  降雨強度模場進行參數率定，第一步包括曼寧粗糙係數、滲透係數的訂定，其餘參數按照表 1 所示進行模式模擬。然後，利用率定後參數對  $100\text{ mm/hr}$  模場進行評估。圖 4 顯示了利用 FVSWM\_2D 得到的數值流出量與 Singer and Walker (1983) 實際觀測值跟 Govindaraju and Kavvas (1991) 解析解結果做對比。

在實驗模場與解析解資料之中，程式模擬出之水文歷線與 Govindaraju and Kavvas (1991) 解析解之結果近乎吻合，而與 Singer and Walker (1983) 實際觀測值在前 5 分鐘由於在  $50\text{ mm/hr}$  降雨強度下之觀測結果為每 5 分鐘一筆，但在快 1 分 45 秒時有多測定一筆數據，而在 1 分 45 秒時該實驗場並未產生地表漫地流；而  $100\text{ mm/hr}$  之觀測結果則是每 3 分鐘一筆，並於 45 秒時有觀測一筆資料，此時地表並未產生漫地流。因土壤先期含水量及飽和狀態並未於詳述於文獻中，在降雨初期，雨水入滲於未飽和土壤層直至飽和狀態，始產生地表逕流，故產生降雨開始與逕流產生之時間差。在  $100\text{ mm/hr}$  降雨強度下，降雨 25~30 分之間，判斷可能的原因是因為在高強度降雨下，由於流速快導致出流口流量測定發生紊亂的現象，故在最後的部分可能會有上下起伏之不穩定觀測數據。

案例二模擬結果與誤差如表 3 所示，率定組的 NSE 值為  $0.853\sim 0.896$  之間，RMSE 值

為  $2.64\sim 3.31$  之間，Delta 誤差為  $4.2\%\sim 9.8\%$ ；驗證組的 NSE 值為  $0.789\sim 0.983$  之間，RMSE 值為  $2.34\sim 7.92$  之間，Delta 誤差為  $3.1\%\sim 6.1\%$ 。上述結果顯示 FVSWM\_2D 模式可有效模擬實驗中地表漫地流產生之水文歷線。此外，在坡面出流口末端模式計算出之最大流深為  $1.06 \times 10^{-3}\text{ m}$ ，與 Singer and Walker (1983) 估計的  $1 \times 10^{-2}\sim 2 \times 10^{-3}\text{ m}$  之結果相符。

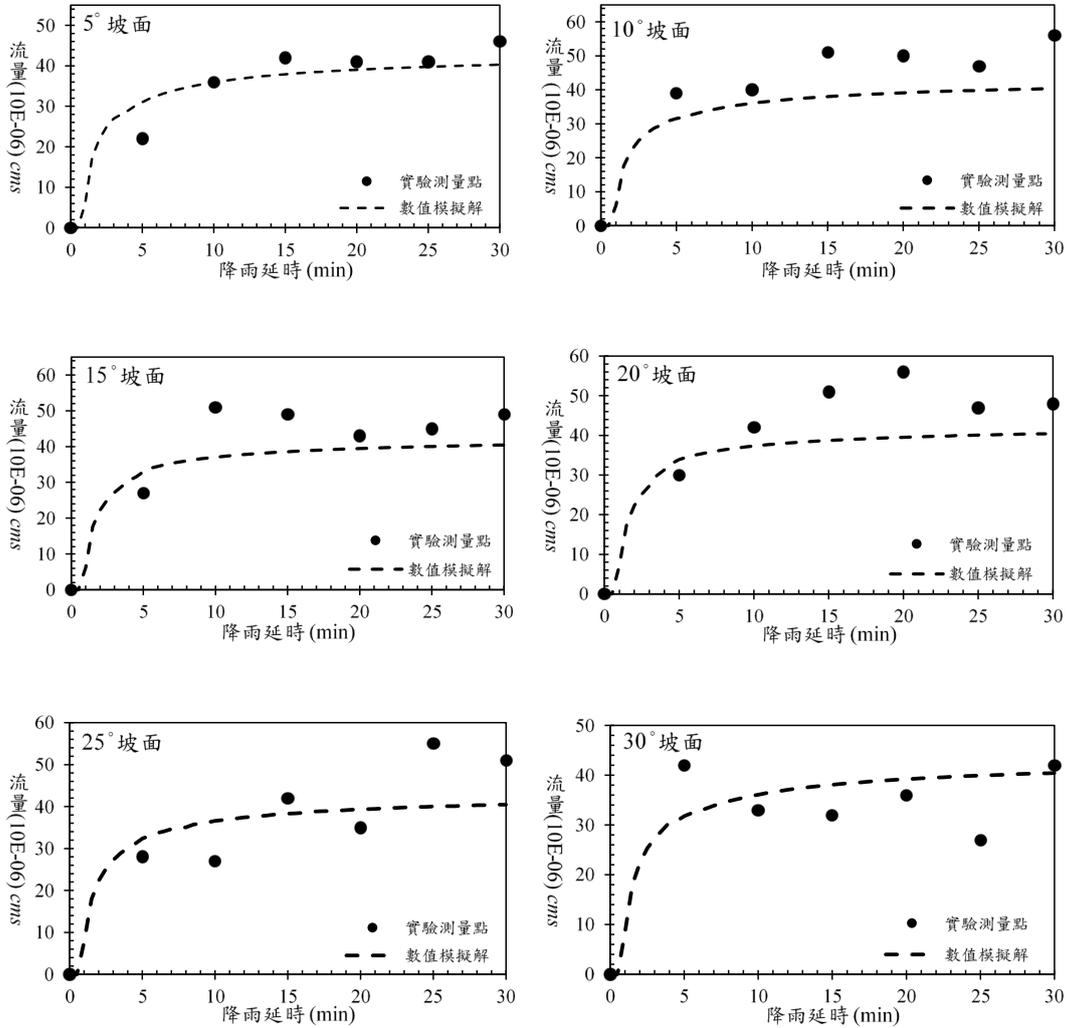


圖3 案例一：小尺度室內實驗模擬結果：實驗測量點參考自周伯原(2020)、數值模擬解為

FVSWM\_2D 模擬結果

Figure 3 Case 1 : The small scale experimental simulation results : The experimental measurement points refer to Chou (2020), and the numerical simulation solution is the FVSWM\_2D simulation result.

表2 案例一：小尺度室內實驗模擬效率分析

Table 2 Case 1: Efficiency analysis of small scale laboratory experiments

項目	NSE	RMSE	Delta
5°率定模場	0.806	5.35	11.875 %
15°率定模場	0.647	7.99	18.095 %
25°率定模場	0.664	7.89	18.702 %
10°驗證模場	0.589	9.05	19.671 %
20°驗證模場	0.556	9.46	20.199 %
30°驗證模場	0.728	7.51	17.629 %

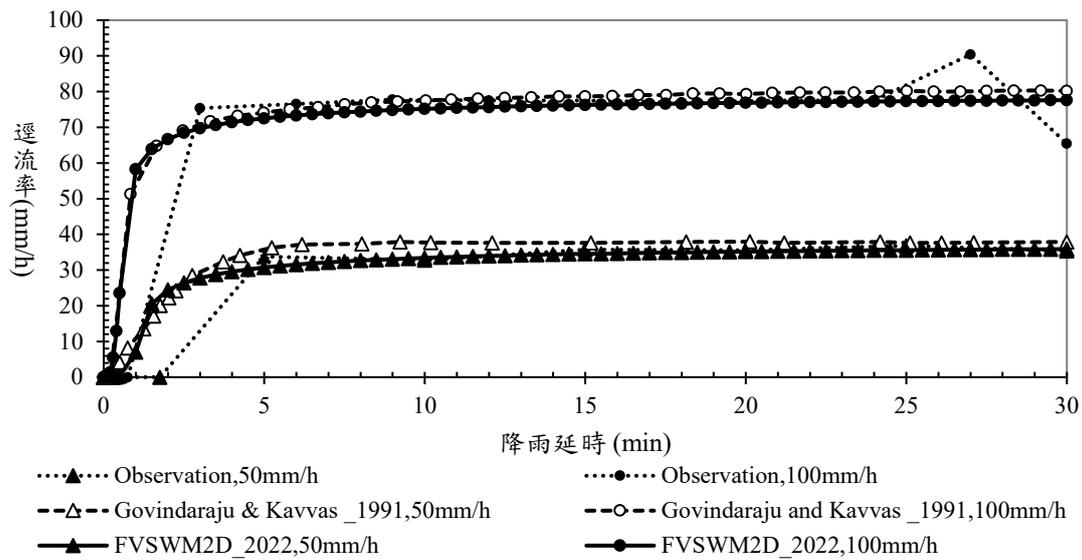


圖4 案例二：實驗模場與解析解資料模擬結果

Figure 4 Case 2 : Simulation results of experimental field and analytical solution.

表3 案例二：實驗模場與解析解資料模擬效率分析

Table 3 Case 2: Efficiency analysis of experimental field and analytical solution

項目	NSE	RMSE	Delta
50 mm/hr率定 / 觀測	0.853	2.64	4.234 %
100 mm/hr驗證 / 觀測	0.789	7.92	6.119 %
50 mm/hr率定 / 解析	0.896	3.31	9.879 %
100 mm/hr驗證 / 解析	0.983	2.34	3.092 %

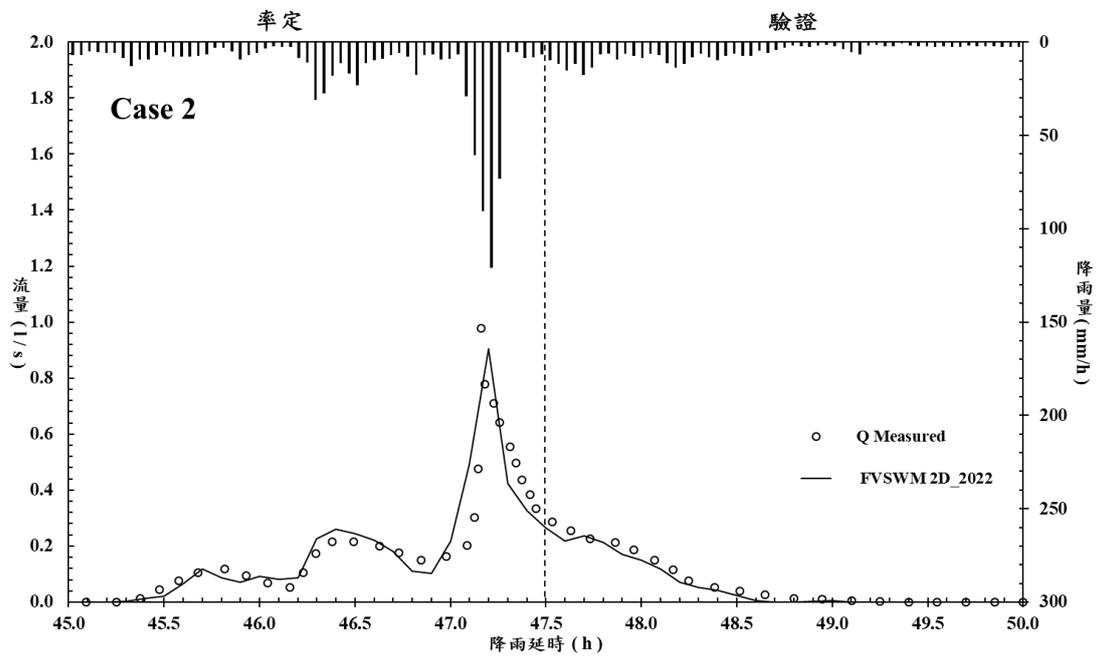
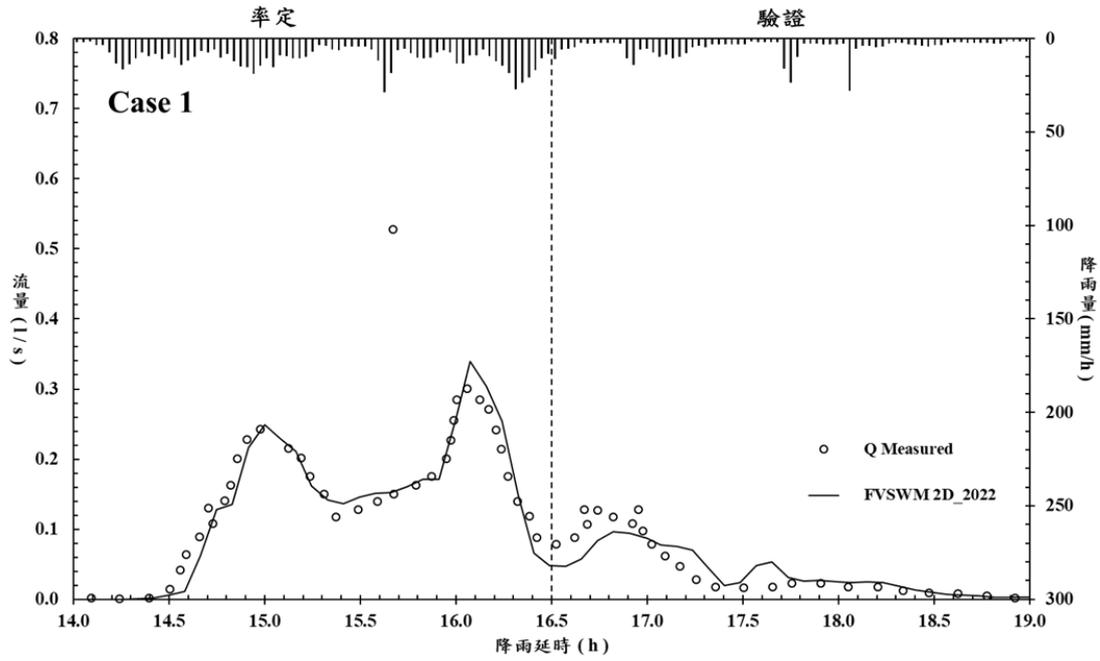
#### 4. 案例三：現地模場實驗資料與模擬結果

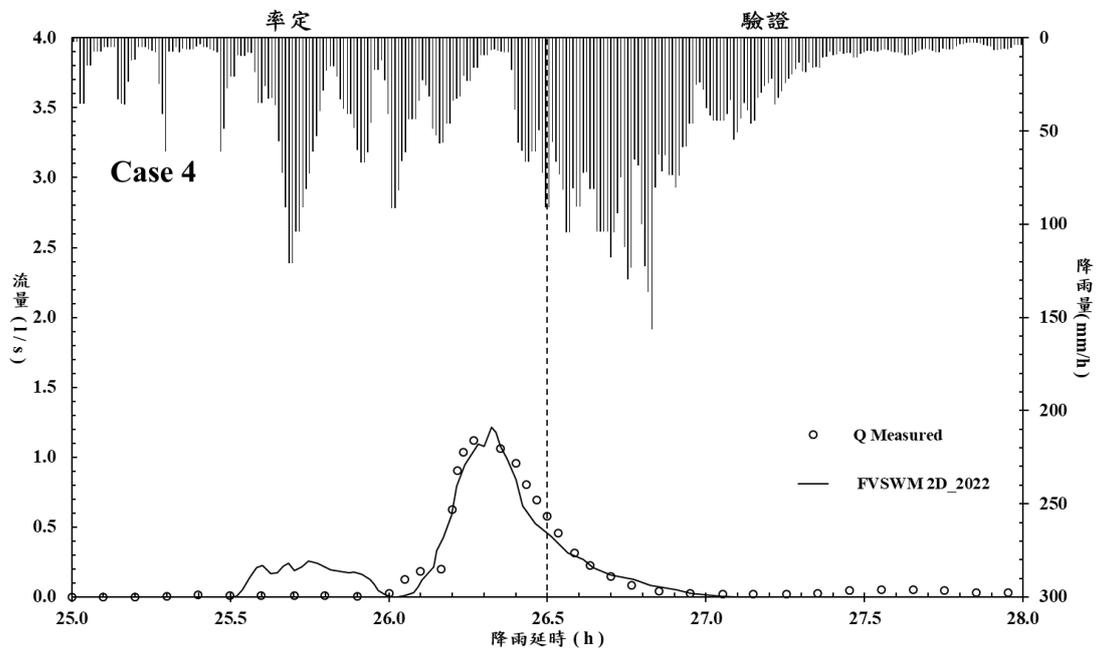
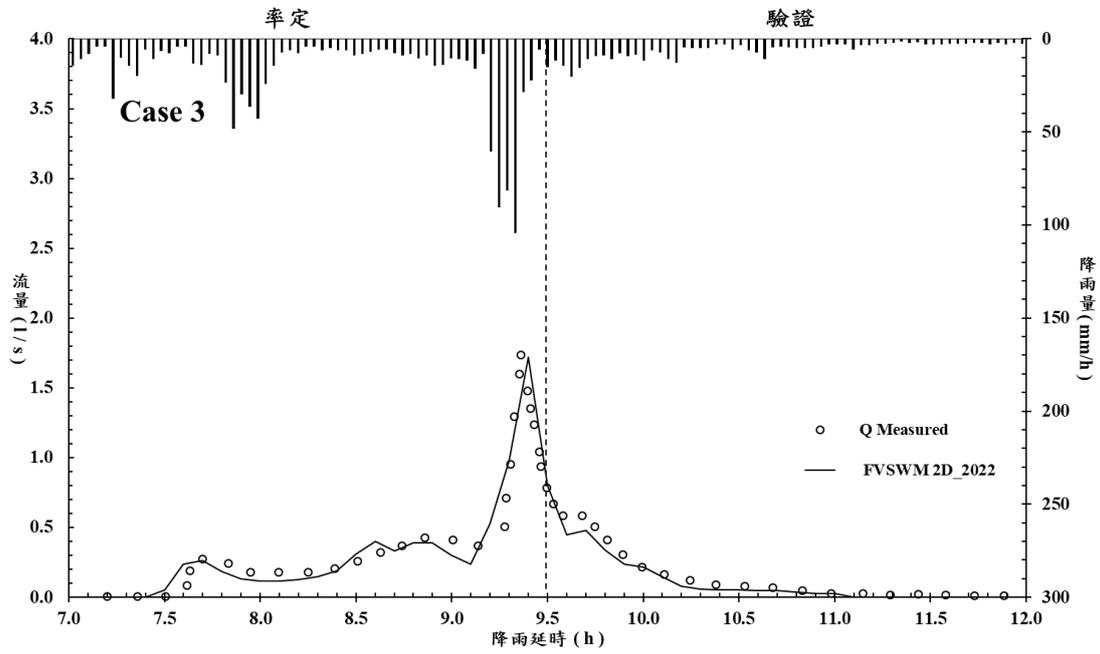
在本節中，為了確保模式能夠處理複雜的降雨事件，使用了 Cea et al. (2016)之觀測值。土壤表面採用 0.2×0.2m 均勻網格。分別對 5 場降雨事件進行地表漫地流模擬，將 5 場降雨事件的總降雨期間分為前半部率定，後半部驗證，使用參數詳見表 1。

圖 5 顯示了 FVSWM\_2D 模擬現地降雨產生之地表漫地流，結果表示該模式可以處理複雜之降雨事件。該模式在 Case1、Case2、Case3 很好的再現了隨著降雨強度改變漫地流產生之變化，另外，Case4、Case5 的曼寧粗糙係數過大的原因，雖然有點過大，但是根據原作者參數率定之輸入，並可以得到近似的水文歷線，而 Case1、Case2、Case3 則是使用正常裸露表土之曼寧粗糙係數。

在 5 場不連續之降雨事件之模擬中，均可以觀察到模擬之水文歷線會隨著降雨峰值變化，並且隨著時間的變化有效預測地表漫地流之現場觀測值。在 Case 1 中，由於降雨量相較於其他 Case 較少很多，故在地表漫地

流之模擬上，漫地流之水文歷線更容易受到降雨量所影響。因此，Case 1 驗證結果，水文歷線起伏波動較大，故造成驗證模場之 NSE 值為 0.649，而相較於其他 Case 就顯得比較低。在 Case 5 中，由於現地場域的外在因子變數多，加上 Green-Ampt 方程式中土壤含水量為飽和之含水量，未考量到未飽和時之土壤含水量變化；因此，在現地前期時，由於大量水入滲至土壤之中未能形成地表漫地流，所以在率定模場就只能依靠調整曼寧 n 值，來降低流速故而增快土壤達飽和的時間，進而導致降雨所造成的漫地流生成來得延遲許多。在驗證模場則是於穩定飽和土壤中模擬，得到的漫地流相對率定模場就比較符合降雨對應之峰值，故驗證模場相較於率定模場 NSE 值來得高。表 4 中的 5 場不連續降雨事件中，率定的 NSE 值介於 0.854~0.969 之間，RMSE 介於 0.022~0.167 之間，誤差範圍 11.39%~24.70%；驗證的 NSE 值介於 0.649~0.987，RMSE 介於 0.019~0.151 之間，誤差範圍 6.97%~36.71%。從上方數據表明，也說明了該模式可以有效的處理複雜之降雨事件。





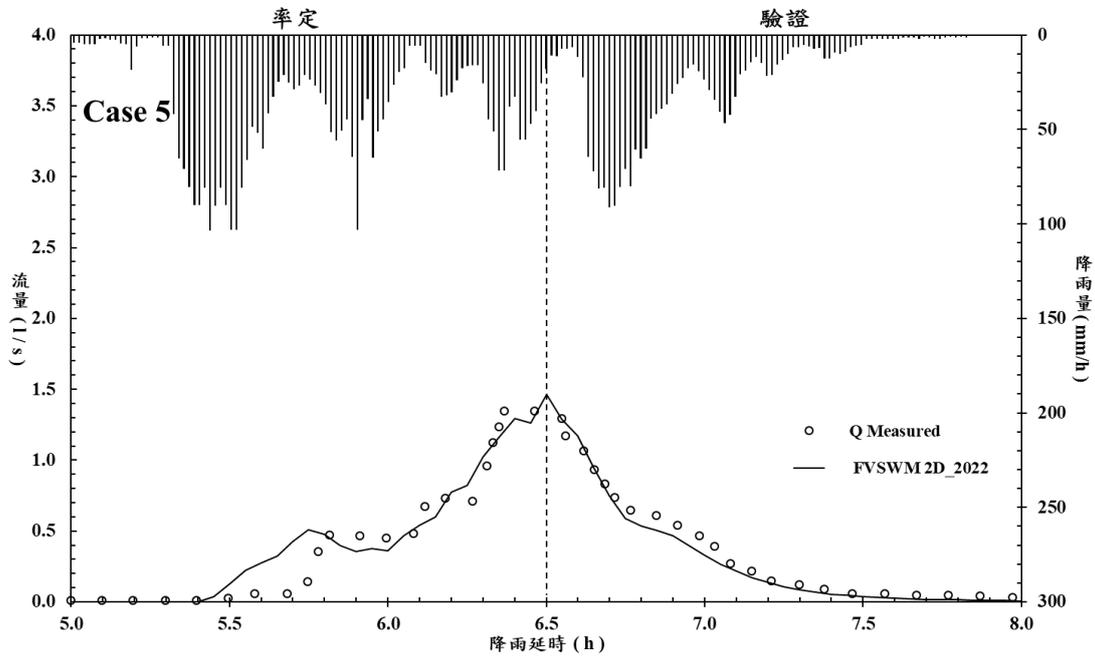


圖5 案例三：現地模場實驗資料模擬結果：QMeasured 參考自 Cea et al. (2016)、  
FVSM2D\_2022 為本研究模擬結果

Figure 5 Case 3 : Simulation results of in-situ field experimental data : QMeasured refers to Cea et al. (2016), FVSM2D\_2022 was the simulation results of this study.

表4 案例三：現地模場實驗資料模擬效率分析

Table 4 Case 3 : Efficiency analysis of in-situ field experimental data

項目	NSE	RMSE	Delta	
<b>Case 1</b>	率定	0.923	0.022	11.39 %
	驗證	0.649	0.026	36.71 %
<b>Case 2</b>	率定	0.953	0.053	14.09 %
	驗證	0.960	0.019	16.53 %
<b>Case 3</b>	率定	0.916	0.151	18.69 %
	驗證	0.955	0.052	17.02 %

Case 4	率定	0.969	0.074	12.22 %
	驗證	0.946	0.037	23.47 %
Case 5	率定	0.854	0.167	24.70 %
	驗證	0.984	0.055	6.97 %

## 結論與建議

本文介紹了在小尺度上建立一個基於物理的地表漫地流模型，並且透過與案例一、案例三之觀測數據及案例二之觀測數據及解析解比較，並於均勻坡面測試了該模式的穩定性。

在案例一小尺度實驗模場中，可以觀察到實驗模擬之水文歷線與觀測點資料近似，儘管在較陡的坡度時，觀測資料無法較穩定的觀測地表漫地流量，但在模式準確度評估上的結果顯示 NSE 值介於 0.556 至 0.806 之間，RMSE 介於 5.35~9.46 之間，而平均絕對偏差則介於 11.875%至 20.199%之間，證明了在小尺度實驗模場上可以有效預測地表漫地流之產生；在案例二實驗模場與解析解資料，較大的實驗模場可以更穩定的取得實驗觀測數據，在 50mm/hr 及 100mm/hr 降雨強度下之實驗場，模式模擬之水文歷線十分近似實驗觀測值，而在模式準確度評估上之 NSE 值介於 0.789 至 0.983 之間，RMSE 介於 2.34~7.92 之間，而平均絕對偏差則介於 3.092%至 9.879%之間；案例三現地模場實驗資料中，測試現地實際觀測之不連續降雨事件，在本次模擬之 5 場降雨事件中均可以觀察到模式模擬之水文歷線儘管在現地充滿不確定因素之情境下，仍然可以呈現與實際觀測值較為相

近之水文歷線，而在模式準確度評估上之 NSE 值介於 0.649 至 0.969 之間，RMSE 介於 0.019~0.151 之間，而平均絕對偏差則介於 11.39%至 36.71%之間，結果顯示該模式數值計算結果與實測值數據有一定程度上之準確性。

FVSWM\_2D 的穩定性及正確估算各個案例中不同條件的能力使該模式可以有效處理坡面降雨所產生的地表漫地流，這為未來進行大尺度模擬，坡面地表漫地流所產生的土壤沖蝕及微地形分佈提供了更多的可能性，可以對其進行更詳盡的研究，並將此模式耦合土壤沖蝕公式以此建立可以廣泛應用之土壤沖蝕模式。

## 參考文獻

- [1] 周伯原(2020)，「降雨入滲與土壤侵蝕模式研究-以青灰泥人工降雨試驗為例」。
- [2] Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M. O., Klein, R., & Perthame, B. T. (2004). A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6), 2050-2065.
- [3] Cea, L., M. Garrido, J. Puertas, A. Jácome, H. del Río, and J. Suárez

- (2010b), Overland flow computations in urban and industrial catchments from direct precipitation data using a two-dimensional shallow water model, *Water Sci. Technol.*, 62(9), 1998–2008.
- [4] Cea, L., & Vázquez-Cendón, M. E. (2010). Unstructured finite volume discretization of two-dimensional depth-averaged shallow water equations with porosity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63(8), 903-930.
- [5] Cea, L., Legout, C., Grangeon, T., & Nord, G. (2016). Impact of model simplifications on soil erosion predictions: application of the GLUE methodology to a distributed event-based model at the hillslope scale. *Hydrological Processes*, 30(7), 1096-1113.
- [6] Chen, G., & Noelle, S. (2017). A new hydrostatic reconstruction scheme based on subcell reconstructions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(2), 758-784.
- [7] Chow, T. J., & Patterson, C. C. (1959). Lead isotopes in manganese nodules. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 17(1-2), 21-31.
- [8] Chaudhry MH, (2008). *Open-Channel Flow*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [9] Costabile, P., Costanzo, C., & Macchione, F. (2012). Comparative analysis of overland flow models using finite volume schemes. *Journal of hydroinformatics*, 14(1), 122-135.
- [10] Dunne, T., & Dietrich, W. E. (1980). Experimental investigation of Horton overland flow on tropical hillslopes. 2. Hydraulic characteristics and hillslopes hydrographs. *Zeitschrift für Geomorphologie. Supplementband Stuttgart.*, (35), 60-80.
- [11] Govindaraju, R. S., Kavvas, M. L., & Jones, S. E. (1990). Approximate analytical solutions for overland flows. *Water resources research*, 26(12), 2903-2912.
- [12] Govindaraju, R. S., & Kavvas, M. L. (1991). Modeling the erosion process over steep slopes: approximate analytical solutions. *Journal of Hydrology*, 127(1-4), 279-305.
- [13] Green, W.H. & Ampt, G.A. "Studies on soil physics, I, Flow of air and water through soils," *The Journal of Agricultural Science.*, vol. 4, pp. 1-24, 1911.
- [14] Howes, D. A., A. D. Abrahams, and E. B. Pitman (2006), One- and two-dimensional modelling of overland flow in semiarid shrubland, Jornada basin, New Mexico, *Hydrol. Processes*, 20, 1027–1046.
- [15] Hunter, N. M., P. D. Bates, M. S. Horritt, and M. D. Wilson (2007), Simple spatially-distributed models for predicting flood inundation: A

- review, *Geomorphology*, 90, 208–225.
- [16] Kivva, S. L., & Zheleznyak, M. J. (2005). Two-dimensional modeling of rainfall runoff and sediment transport in small catchment areas. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 32(6).703-716.
- [17] Moriasi, D. N., Arnold, J. G., Van Liew, M. W., Bingner, R. L., Harmel, R. D., & Veith, T. L. (2007). Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Transactions of the ASABE*, 50(3), 885-900.
- [18] Nord, G., & Esteves, M. (2005). PSEM\_2D: A physically based model of erosion processes at the plot scale. *Water resources research*, 41(8).
- [19] Rawls, W. J., Brakensiek, D. L., & Miller, N. (1983). Green-Ampt infiltration parameters from soils data. *Journal of hydraulic engineering*, 109(1), 62-70.
- [20] Singer, M. J. & Walker, P. H. (1983), Rainfall-runoff in soil erosion with simulated rainfall, overland flow and cover, *Australian Journal of Soil Research.*, 21, 109 – 122.
- [21] Sanders, B. F., Schubert, J. E., & Gallegos, H. A. (2008). Integral formulation of shallow-water equations with anisotropic porosity for urban flood modeling. *Journal of hydrology*, 362(1-2), 19-38.
- [22] Sanders, B. F., J. E. Schubert, and H. A. Gallegos (2008), Integral formulation of shallow-water equations with anisotropic porosity for urban flood modeling, *Journal of Hydrology.*, 362, 19–38.
- [23] Schubert, J. E., B. F. Sanders, M. J. Smith, and N. G. Wright (2008), Unstructured mesh generation and landcover-based resistance for hydrodynamic modeling of urban flooding, *Advances in Water Resources.*, 31, 1603–1621.
- [24] Xia, X., Liang, Q., Ming, X., & Hou, J. (2017). An efficient and stable hydrodynamic model with novel source term discretization schemes for overland flow and flood simulations. *Water resources research*, 53(5), 3730-3759.
- [25] Xia, X., & Liang, Q. (2018). A new efficient implicit scheme for discretising the stiff friction terms in the shallow water equations. *Advances in water resources*, 117, 87-97.
- [26] Zhang, W., & Cundy, T. W. (1989). Modeling of two-dimensional overland flow. *Water Resources Research*, 25(9), 2019-2035.

水土保持學報 52 (2)3009-3028(2022)

Journal of Soil and Water Conservation, 52 (2)3009-3028 (2022)

111 年 5 月 13 日收稿

111 年 6 月 16 日修改

111 年 6 月 22 日接受